

# SVILUPPO DI MODELLI NUMERICI PER IL DESIGN DI STRUTTURE ISOGRID

M. Regi\*, M. Marchetti\*

## SOMMARIO

Le strutture aerospaziali, ed in particolar modo quelle di grandi dimensioni come i lanciatori, debbono rispettare le seguenti specifiche: resistenza statica, stabilità e leggerezza. È possibile soddisfare a questi requisiti mediante lo sviluppo di materiali innovativi e di particolari geometrie. Le strutture reticolari (multigrid lattice structures), grazie a specifici modelli e teorie, consentono di progettare strutture di notevoli dimensioni secondo i suddetti “vincoli”. Inoltre, possono essere cilindriche, coniche o piane (piastra - pannello).

Il loro design prevede: l’analisi teorica, quella numerica, la verifica agli elementi finiti (FEM), fino ad arrivare alla manifattura di dimostratori e prototipi (full scale) utili alla validazione sperimentale dei risultati numerici conseguiti.

Considerando le notevoli dimensioni delle strutture aerospaziali, non è possibile realizzare un numero considerevole di dimostratori (come si fa, invece, nel caso dei provini per caratterizzare un materiale). Quindi, il comportamento meccanico viene studiato attraverso un’analisi stocastica, legata non più a un set di campioni tale da costituire una “popolazione” statisticamente significativa, ma a un adeguato numero di simulazioni numeriche/FEM che consentano di verificare le specifiche imposte (es. resistenza e stabilità). I risultati delle simulazioni potranno essere successivamente confrontati con quelli ottenuti con un esiguo numero di test sperimentali.

## INTRODUZIONE

Le strutture anisogrid (fig. 1) sono costruite da rinforzi (rib) elicoidali il cui scopo è quello di resistere alle sollecitazioni, e da rib circolari utili a incrementare il carico critico ammissibile (stabilità) e a correggere le difettosità prodotte dai processi tecnologici di manifattura. Da osservare, che questo tipo di elemento presenta delle figure geometriche ripetute, ma diverse. Per contro in quelle isogrid a seguito descritte (fig. 3), è presente un solo elemento geometrico ripetuto.

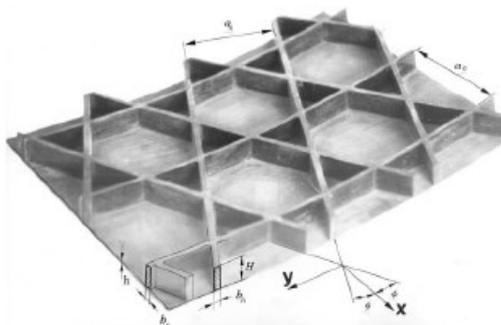


fig. 1 la geometria lattice anisogrid

Mediante il modello teorico di Vasiliev [1], è possibile dimensionare una struttura cilindrica (o tronco conica

con un piccolo angolo di semiapertura) rispettando simultaneamente le condizioni di: massa minima ( $M$ ), resistenza statica e stabilità. Dagli autori del presente articolo sono stati sviluppati dei software che consentono il dimensionamento di un elemento anisogrid rispettando, numericamente, le tre specifiche di Vasiliev. Ovvero, in corrispondenza del carico di compressione  $P$  applicato: lo sforzo massimo ( $\sigma_{max}$ ) agente sulla struttura è esattamente uguale a quello ultimo del materiale ( $\sigma_u$ ), il carico è esattamente uguale a quello critico (autovalore unitario:  $\lambda = P_{cr}/P = 1 \Rightarrow P = P_{cr}$ ) e la massa ( $M$ ) è minima. Tali risultati vanno verificati con un’indagine agli elementi finiti (FEM) che permetta di determinare la configurazione del carico e dei vincoli che rispetta le tre specifiche di Vasiliev. In questo caso interviene l’analisi stocastica intesa come lo studio FEM di un elevato numero di configurazioni, fino alla determinazione di quella che convalida i risultati teorico/numerici.

Sono state analizzate circa venti differenti configurazioni carico/vincoli. In fig. 2 è mostrato un esempio in cui le condizioni di Vasiliev non sono verificate ( $\lambda = P_{cr}/P < 1 \Rightarrow P > P_{cr}$ ,  $\sigma_{max} > \sigma_u$ ).

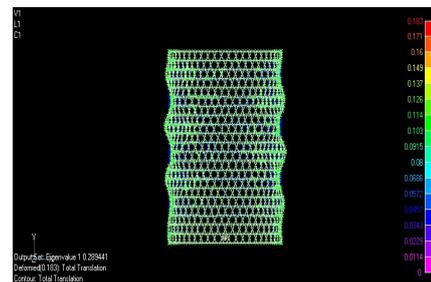


fig. 2 instabilità della struttura e non verificata resistenza statica

Il soddisfacimento, mediante analisi FEM, delle condizioni di Vasiliev ( $\lambda = P_{cr}/P = 1 \Rightarrow P = P_{cr}$ ,  $\sigma_{max} = \sigma_u$ ,  $M = M_{min}$ ) sono state ottenute (fig. 3) con la seguente configurazione:

- il carico è uniformemente distribuito su tutti i nodi
- vincoli: sono impediti le traslazioni al rinforzo circolare di base e le rotazioni di tutti gli altri nodi della mesh.

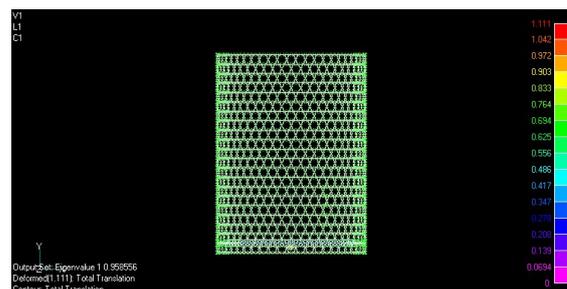


fig. 3 stabilità della struttura e resistenza statica

Ovviamente, il final design della struttura verrà realizzato introducendo dei coefficienti di sicurezza, quindi, con un piccolo scostamento dalle condizioni ideali, ovvero:  $M \rightsquigarrow M_{min}$ ,  $\lambda = P_{cr}/P \rightsquigarrow 1 \Rightarrow P \ll P_{cr}$ ,  $\sigma_{max} \ll \sigma_u$ .

### STRUTTURE RETICOLARI ISOGRID

Il design e la realizzazione delle strutture anisogrid richiede modelli teorici, processi tecnologici di produzione (filament windings) e di test (su prototipi in scala 1:1) non semplici.

Può essere utile sviluppare un modello per la progettazione di strutture simili, ma geometricamente più semplici. La procedura che viene a seguito illustrata è sicuramente meno raffinata di quella realizzata da Vasiliev, ma come verrà dimostrato, consente un design nelle condizioni di resistenza statica e stabilità dell'elemento. Ciò sta a indicare che, in corrispondenza di un metodo di calcolo semplificato, è possibile tramite le analisi FEM determinare la configurazione che soddisfa ai requirements operativi imposti. Il tipo di struttura è una isogrid nella quale i rinforzi elicoidali del modello di Vasiliev vengono sostituiti da elementi paralleli all'asse longitudinale (modello FEM in fig. 4).

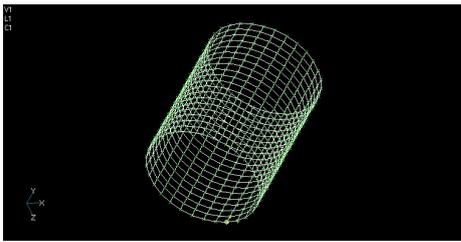


fig. 4 geometria isogrid studiata

Nel caso cilindrico, i parametri iniziali di riferimento:

il raggio di curvatura  $R$  [m], l'altezza  $L$  [m]

Il reticolo è costituito dall'intersezione di rinforzi circonferenziali e altri paralleli all'asse longitudinale.

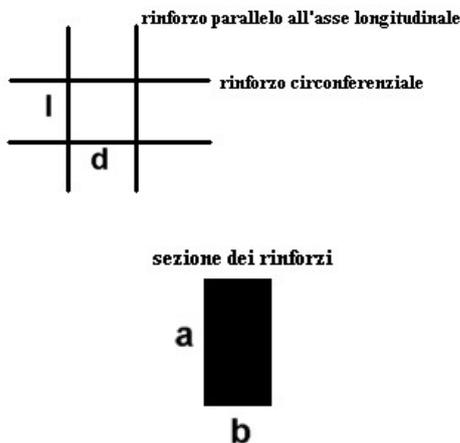


fig. 5 caratterizzazione geometria della struttura

Grandezze e dimensioni caratteristiche (fig. 5):

- $\pm\phi$  angolo delle rib parallele all'asse longitudinale della struttura =  $0^\circ$
- $a, b$ : dimensioni delle sezioni resistenti dei rinforzi
- $l$ : distanza tra due rinforzi circonferenziali
- $d$ : distanza tra due rinforzi paralleli all'asse longitudinale della struttura (per comodità detti verticali)
- $n_e$ : numero dei rinforzi verticali
- $n_c$ : numero dei rinforzi circonferenziali.

Viene assegnato il valore del carico di compressione  $P$  [N] applicato, e il materiale impiegato di cui sono noti:

densità  $\rho$  [Kg/m<sup>3</sup>]    modulo di Young  $E$  [Pa]  
 carico ultimo a compressione  $\sigma_u$  [Pa]

La sezione resistente dei rinforzi è:

$$A = a \times b$$

Da un primo confronto tra questa configurazione geometrica e quella lattice anisogrid è possibile ipotizzare che il processo tecnologico di produzione della prima sia sicuramente più semplice di quello richiesto per la seconda.

Si definisce "singolo tratto di un rinforzo verticale" (di altezza pari a  $l$ ) il segmento compreso tra le intersezioni con due circonferenziali (fig. 6).



fig. 6 singolo tratto di un rinforzo verticale

Il numero totale ( $N$ ) dei "singoli tratti di rinforzo verticale" è dato dalla seguente espressione:

$$N = n_e (n_c - 1)$$

L'altezza  $L$  di tutta la struttura è definibile come:

$$L = l(n_c - 1)$$

quindi:

$$l = \frac{L}{(n_c - 1)}$$

È possibile ricavare l'espressione della circonferenza  $C$  della struttura e della distanza  $d$ :

$$C = 2\pi R = d \times n_e \Rightarrow d = \frac{2\pi R}{n_e}$$

## IL MODELLO MATEMATICO

Fissata, inizialmente, una sezione resistente quadrata ( $a = b$ , quindi  $A = a^2$ ), il modello si basa sulla seguente procedura:

- calcolo della sezione resistente dei rinforzi verticali nella condizione di resistenza statica ( $a_s$ )
- calcolo della sezione resistente dei rinforzi verticali nella condizione di stabilità ( $a_b$ )
- definizione della sezione resistente prendendo il massimo tra  $a_s$  e  $a_b$
- la sezione del rinforzo circolare è posta uguale a quella dell'elemento verticale.

Anche in questo caso, analogamente al modello di Vasiliev valido per le anisogrid, è stato imposto che:

1. i rinforzi verticali svolgono il compito di resistere alle sollecitazioni applicate
2. quelli circolarizionali "spezzano" la lunghezza dei verticali (per l'aumento del carico critico) e hanno, una azione (tipo pressione autostabilizzante [1]) di correzione di eventuali imperfezioni di forma (dovuti al processo tecnologico di produzione), con il conseguente incremento della resistenza e della stabilità reale della struttura.

La semplificazione consiste nel poter dimensionare la struttura mediante il confronto tra le due condizioni ("vincoli") di resistenza statica e di stabilità, analizzate singolarmente. Mentre nel modello di Vasiliev, con un criterio di minimizzazione geometrica, i due "vincoli" sono imposti **contemporaneamente**.

### Calcolo della sezione $a_s$ :

si suppone che il carico  $P$  sia uniformemente distribuito ( $P_i$ ) su ciascun "singolo tratto di rinforzo verticale"  $i$ , che è schematizzato come una trave incastrata di sezione  $A_i = a^2$  (fig. 7).



fig. 7 distribuzione del carico in un generico "singolo tratto di rinforzo verticale"

$P_i$  si calcola come segue:

$$P_i = \frac{P}{N}$$

lo sforzo ( $\sigma$ ) agente sulla sezione dell'elemento  $i$ -esimo (fig. 7) vale:

$$\sigma_i = \frac{P_i}{A_i} = \frac{P}{Na^2}$$

ipotizzando che lo sforzo applicato sia proprio uguale a quello ultimo del materiale ( $\sigma_u$ ), ovvero  $\sigma_i = \sigma_u$ , si ha:

$$A_i = \frac{P_i}{\sigma_i} = \frac{P}{N\sigma_u} = a_s^2 \Rightarrow a_s = \left( \frac{P}{N\sigma_u} \right)^{0.5}$$

### Calcolo della sezione $a_b$ :

nella configurazione riportata in fig. 7, il carico critico ( $P_{cri}$ ) è definito:

$$P_{cri} = \frac{\pi^2 EI_i}{l^2}$$

dove  $I_i$  è il momento d'inerzia della sezione resistente, e vale:

$$I_i = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{a^4}{12}$$

da cui:

$$I_i = \frac{P_{cri} l^2}{\pi^2 E}$$

Imponendo che il carico ( $P_i$ ) applicato al "singolo tratto di un rinforzo verticale" sia proprio uguale a quello critico ( $P_{cri}$ ) si ha:

$$I_i = \frac{a^4}{12} = \frac{P_{cri} l^2}{\pi^2 E} = \frac{P}{N} \frac{l^2}{\pi^2 E} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^4 = 12 \left( \frac{Pl^2}{N\pi^2 E} \right) \Rightarrow a_b = \left( \frac{12Pl^2}{N\pi^2 E} \right)^{1/4}$$

### Calcolo della sezione finale $a$ dei rinforzi:

la dimensione  $a$  della sezione resistente è calcolata come:

$$a = \max(a_s, a_b)$$

Ovviamente, è richiesta un'analisi agli elementi finiti (FEM) per verificare il soddisfacimento delle condizioni di resistenza statica e stabilità.

### Calcolo della massa $M$ della struttura:

il volume complessivo  $V$  della struttura è dato dalla somma di quello dei rinforzi verticali ( $V_v$ ) e di quelli circolarizionali ( $V_c$ ):

$$V = V_e + V_c = n_e La^2 + n_c 2\pi Ra^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = a^2(n_e L + n_c 2\pi R)$$

quindi:

$$\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow M = \rho V = \rho a^2(n_e L + n_c 2\pi R) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \rho a^2(n_e L + n_c C)$$

### RISULTATI NUMERICI

il modello appena descritto è stato tradotto in un programma di calcolo MATLAB, con i cui i dati numerici è possibile eseguire una verifica agli elementi finiti (FEM) per capire se la procedura soddisfa ai requisiti di resistenza e stabilità, e quali debbono essere le eventuali modifiche e variazioni.

La struttura analizzata ha le seguenti caratteristiche:

$$\text{raggio } R = 1.5 \text{ m} \quad \text{altezza } L = 4 \text{ m}$$

$$n_e = 100 \quad n_c = 60$$

il materiale impiegato è una lega d'alluminio *Al2024*:

$$\text{densità } \rho = 2800 \text{ Kg/m}^3 \quad \text{modulo di Young } E = 70 \text{ GPa}$$

$$\text{coefficiente di Poisson } \nu = 0.33$$

$$\text{carico ultimo } \sigma_u = 400 \text{ MPa}$$

carico assiale di compressione totale di  $P = 3 \text{ MN}$ .

Viene imposto:

- una sezione resistente quadrata ( $a = b$ )
- il carico è uniformemente distribuito su tutti i nodi
- vincoli: sono impedito le traslazioni al rinforzo circonferenziale di base e le rotazioni di tutti gli altri nodi della mesh.

con cui sono state ottenuti i seguenti risultati numerici (tab. 1):

GRANDEZZA	VALORE
$d$ [m]	0.0942
$l$ [m]	0.0678
$a$ [m]	0.0025
$\lambda$ [1]	< 1
$\sigma_{max}$ [Pa]*	> $\sigma_u$
$M$ [Kg]	16.891

\* massimo sforzo applicato sulla struttura (da modello FEM)

tab. 1 grandezze determinate

I dati riportati nella tab. 1 mostrano che l'autovalore ( $\lambda = P_{cr}/P$ ) è minore di uno (instabilità) e il massimo sforzo applicato è superiore a quello ultimo del materiale. Pertanto, sono necessarie delle correzioni dimensionali. Ossia con il modello FEM è necessario, tramite iterazioni trovare il valore di  $a$  che soddisfa alle

specifiche di resistenza statica e di stabilità. In fig. 8 è mostrata, ad esempio, l'analisi di buckling.

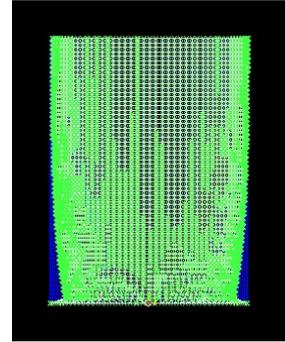


fig. 8 analisi di buckling ( $\lambda < 1$ )

I risultati appena mostrati sono stati ottenuti utilizzando una sezione resistente quadrata (fig. 9).

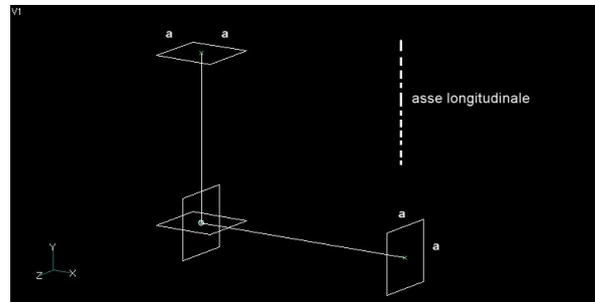


fig. 9 configurazione a sezioni resistenti quadrate

Nel modello di Vasiliev le sezioni non sono quadrate, ma rettangolari con il lato maggiore ortogonale all'asse longitudinale della struttura (fig. 1). Pertanto, è stato imposto, conservando il valore di  $A$  e, quindi, della massa  $M$  della struttura isogrid:

$$a = 2b \Rightarrow A = a \times b = 2b^2 \Rightarrow b = \left(\frac{A}{2}\right)^{0.5} \Rightarrow a = 2\left(\frac{A}{2}\right)^{0.5}$$

In questo caso si ottiene la configurazione riportata in fig. 10, che è analoga a quella adottata da Vasiliev nelle strutture lattice anisogrid, dove  $a$  assume il ruolo di  $H$  [1]. In questo modo, varia il momento d'inerzia della struttura rispetto al suo asse longitudinale.

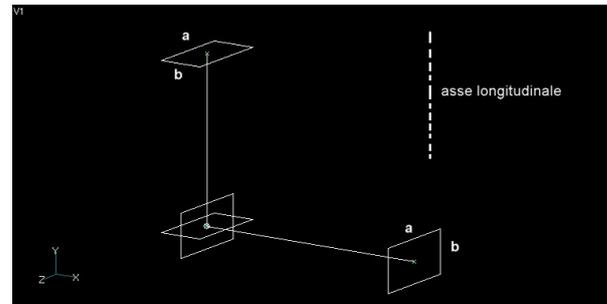


fig. 10 nuova configurazione delle sezioni resistenti (alla Vasiliev)

I risultati ottenuti con la configurazione di fig. 10 sono riportati nella tab. 2.

GRANDEZZA	VALORE
$d$ [m]	0.0942
$l$ [m]	0.0678
$a$ [m]	0.0035
$b$ [m]	0.0017
$\lambda$ [1]	$\sim < 1$
$\sigma_{max}$ [Pa]*	$> \sigma_u$
$M$ [Kg]	16.891

\* massimo sforzo applicato sulla struttura (da modello FEM)

tab. 2 grandezze determinate

Anche in questo caso non sono soddisfatte le condizioni di resistenza statica e stabilità.

Allora imponendo la configurazione di sezione quadrata (fig. 9) si maggia la dimensione  $a$  di un ordine di grandezza, ottenendo i seguenti risultati (tab. 3):

GRANDEZZA	VALORE
$d$ [m]	0.0942
$l$ [m]	0.0678
$a$ [m]	0.025
$\lambda$ [1]	$\gg 1$
$\sigma_{max}$ [Pa]*	$< \sigma_u$
$M$ [Kg]	1689.1

\* massimo sforzo applicato sulla struttura (da modello FEM)

tab. 3 grandezze determinate

In questo caso la struttura resiste staticamente ( $\sigma_{max} < \sigma_u$ ) ed è stabile ( $\lambda \gg 1$ ).

Adottando la configurazione di fig. (sezioni alla Vasiliev) si ha (tab. 4):

GRANDEZZA	VALORE
$d$ [m]	0.0942
$l$ [m]	0.0678
$a$ [m]	0.035
$b$ [m]	0.017
$\lambda$ [1]	$\gg 1$
$\sigma_{max}$ [Pa]*	$< \sigma_u$
$M$ [Kg]	1689.1

\* massimo sforzo applicato sulla struttura (da modello FEM)

tab. 4 grandezze determinate

Nuovamente vengono garantiti i requisiti imposti.

Pertanto, s'osserva come l'aumento di un ordine di grandezza della sezione resistente consente di dimensionare la struttura nelle condizioni di resistenza e stabilità. Iterando il modello FEM, tra i due valori numerici di  $a$  (tab. 1 e tab. 3) è possibile determinare la sezione resistente ( $a$ ) in cui lo sforzo applicato è  $\leq$  a quello ultimo del materiale e l'autovalore è unitario o di poco superiore (condizioni limite di resistenza statica, stabilità e massa totale della struttura). Questo è necessario anche considerando il fatto che la massa  $M$  va con il quadrato di  $a$  quindi in corrispondenza di un aumento di un ordine di grandezza di quest'ultima si ha

un incremento significativo nel peso della struttura. Va, inoltre, sottolineato che anche il modello di Vasiliev rappresenta un preliminary design.

Se si riduce il numero di rinforzi circolari ( $n_c \downarrow$ ) si ha:

- le sezioni resistenti ( $a$ ) e la massa ( $M$ ) la distanza  $l$  aumentano
- $d$  rimane costante
- la struttura è meno stabile in quanto la lunghezza  $l$  dei rinforzi verticali aumenta.

In [3] è mostrato che mediante le condizioni di Vasiliev utilizzate per le anisogrid è possibile dimensionare una isogrid a maglia triangolare. Il modello sviluppato nel presente articolo per le isogrid a maglia quadrata/rettangolare è finalizzato a realizzare uno strumento di calcolo semplice, ma utile per un design preliminare di una struttura reticolare aerospaziale e la successiva verifica FEM.

## CONCLUSIONI:

Il modello appena descritto consente, in maniera molto semplice, di eseguire un calcolo **preliminare** delle sezioni resistenti dell'elemento isogrid cilindrico. Dopo di che, mediante lo studio FEM, è possibile eseguire rapidamente delle analisi iterative con le quali dimensionare le suddette sezioni resistenti ( $a$ ) in modo che soddisfino alle specifiche di resistenza statica e di stabilità. Questo modo di procedere è presente in molti campi dell'ingegneria (si pensi al problema di Reimann in gas dinamica) dove per studi e fenomeni complessi è necessario avere dei modelli di calcolo che forniscano dei valori preliminari che siano il più possibile prossimi a quelli finali che verranno, quindi, determinati con poche iterazioni successive. Nel caso in cui i valori preliminari non fossero disponibili, e si analizzasse il fenomeno con dei valori iniziali scelti casualmente, potrebbero servire un numero di iterazioni notevoli (con tempi di calcolo estremamente più lunghi) e con il rischio di non arrivare a convergenza.

Quindi, il modello sviluppato, anche se meno raffinato di quello di Vasiliev per le anisogrid, è molto utile e di facile applicazione per il design di una struttura isogrid. Inoltre, queste ultime, sia in termini geometrici che di processi tecnologici di produzione, sono relativamente più "semplici" rispetto alle anisogrid.

## BIBLIOGRAFIA

1. V. Vasiliev, V. Barynin, A. Rasin – **ANISOGRID LATTICE STRUCTURES – SURVEY OF DEVELOPMENT AND APPLICATION**, Composite Structures 54 (2001) 361-370.
2. M. Regi, M. Marchetti, G. Allegri, F. Mancia – **STUDIO DI STRUTTURE MULTIGRID RAFFORZATE CON NANOTUBI IN CARBONIO PER APPLICAZIONI SPAZIALI**, Atti del Congresso Nazionale AIDAA Roma 15-19/09/2003, vol. 1, pag. 517.
3. M. Regi, F. Mancia, M. Marchetti, G. Totaro, F. De Nicola, V. V. Vasiliev, A. F. Rasin –

**NANOSTRUCTURED COMPOSITE MATERIALS  
AND ANISOGRID LATTICE STRUCTURES FOR  
AEROSPACE APPLICATIONS, PART A:  
SYNTHESIS OF CARBON NANOTUBES AND  
THEIR APPLICATION IN “ANISOGRID LATTICE  
STRUCTURES”, PART B: OPTIMEZED DESIGN  
OF ISOGRID AND ANISOGRID LATTICE  
STRUCTURES**, Proceedings 55<sup>th</sup> IAC International  
Astronautical Congress IAF, October 4 - 8 2004  
Vancouver Canada

## **RIFERIMENTI**

\*Università degli Studi di Roma “La Sapienza”,  
Dipartimento di Ingegneria Aeronautica e Astronautica  
Via Eudossiana 18 - 00184 Roma – Italy  
tel. 06/44585800  
fax. 06/44585670  
e-mail: [mario.marchetti@uniroma1.it](mailto:mario.marchetti@uniroma1.it)  
[marco.regi@uniroma1.it](mailto:marco.regi@uniroma1.it)