NONO CONVEGNO NAZIONALE
della
Associazione Italiana per il Controllo della Qualità

IL RUOLO DELLA QUALITA' NELLA ATTUALE PROSPETTIVA SOCIO-ECONOMICA

Memorie - Vol. 1

Roma - 23/24 Settembre - 1976

I N D I C E   P E R   M E M O R I A

I PROGRAMMI CARA: COMPUTER AIDED RELIABILITY ANALYSIS

Roberto Somma, Direzione Controllo Qualità
Selenia S.p.A., Roma

1. INTRODUZIONE

L'Affidabilità deve affrontare lo studio di sistemi elettronici sempre più complessi, sia perchè le prestazioni ad essi richieste comportano ovvie complicazioni nella loro struttura, sia perchè la tendenza a sistemi multifunzionali comporta una crescita dei blocchi del diagramma dell'affidabilità, non più riconducibili alle ormai ben note, semplici, configurazioni serie e parallelo.
Naturalmente una situazione come questa rende difficile sia l'impostazione che la risoluzione delle equazioni costituenti il modello matematico per l'affidabilità del sistema; sorge ovvio a questo punto il tentativo di automatizzazione di quel processo che, a partire dal diagramma a blocchi dell'affidabilità, conduce alla determinazione della probabilità di successo del sistema ad un certo tempo e di altre grandezze caratterizzanti l'affidabilità del sistema.
Sulla scia delle esperienze maturate nell'ambito del C.A.D. (Computer Aided Design) si tenta di sviluppare una metodologia analoga per l'affidabilità che, per uniformità, prende il nome di C.A.R.A. (Computer Aided Reliability Analysis).
Nei paragrafi successivi viene presentato un approccio al problema.

1.1 Modello di Poisson

Nello studio dell'affidabilità dei sistemi elettronici è ormai universalmente accettato il Modello di Poisson.
Le ragioni di tale scelta risiedono ovviamente nel fatto che le ipotesi che sono alla base di questo modello trovano un accordo sufficientemente buono con quanto può in pratica assumersi nei confronti dei sistemi in esame.
Tali ipotesi sono le seguenti:

a) - La probabilità condizionata di un evento (passaggio da uno stato del sistema ad un altro) nel tempo Δt è data da $\lambda\Delta t$, essendo λ la frequenza istantanea di evento (eventi nell'unità di tempo)
b) - Ogni evento è indipendente dagli altri
c) - La probabilità di più di un evento nel tempo Δt è infinitesima rispetto a Δt.

Se si impostano, a partire da tali ipotesi, le equazioni che legano nel tempo le probabilità di permanenza nei singoli stati del sistema, si trova che, nel caso di λ =cost, si giunge ad un sistema di n equazioni differenziali in n incognite a coefficienti costanti (essendo n il numero di stati del sistema).
Un tale sistema di equazioni è caratteristico di un processo Markoviano a stati-discreti e tempo-continuo, omogeneo.
Risolvendo il sistema di equazioni differenziali si ricavano le probabilità di essere nei vari stati in funzione del tempo o in un tempo determinato

se si fa uso di un processo di integrazione numerica. La risoluzione di un simile sistema non presenta, concettualmente, difficoltà ed i metodi noti per giungere alla soluzione sono molteplici, sia nel tempo, sia numerici, sia nel dominio della variabile complessa s, eventualmente facendo uso della rappresentazione col grafo di flusso ed applicando a quest'ultimo le tecniche di riduzione del Mason.

1.2 Problemi connessi alla risoluzione

Anche se, come detto, non ci sono problemi concettuali alla soluzione, si incontrano notevoli difficoltà pratiche quando il numero di stati (e quindi di equazioni) diviene alto, o quando, anche con un numero accettabile di stati, si abbiano i parametri di un blocco del sistema condizionati agli stati operativi degli altri blocchi.

E' evidente il primo tipo di difficoltà e se si pensa che anche con blocchi capaci di due sole condizioni operative (funzionante/guasto) il numero di stati del sistema è 2^N, dove N è il numero di detti blocchi, si può vedere come una tale limitazione sul numero di stati condizioni in maniera decisamente forte la solubilità pratica del sistema.

Per illustrare il secondo tipo di difficoltà si prende in considerazione il semplice sistema di fig. 1

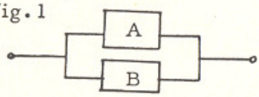

Fig. 1

se le condizioni sui parametri dei blocchi sono le seguenti:

a) - $\lambda_A \neq \lambda_B$

b) - $(\lambda_A)_{B\,\text{guasto}} = \lambda'_A \neq \lambda'_B = (\lambda_B)_{A\,\text{guasto}}$

c) - $\mu A \neq \mu B$

la probabilità di successo (almeno un blocco funzionante) avrà la seguente espressione del tempo

$$R(t) = \sum_{i=1}^{3} a_i \, e^{s_i t} \qquad (1)$$

dove s_1, s_2, s_3 sono soluzioni della seguente equazione

$$s^3 + s^2(\lambda_A + \lambda_B + \lambda'_A + \lambda'_B + \mu_A + \mu_B) + s(\lambda_A\lambda'_A + \lambda_A\mu_B + \lambda'_A\lambda_B + \lambda'_A\lambda'_B + \lambda'_B\mu_B + \lambda_A\lambda'_B +$$
$$+ \lambda_B\lambda'_B + \lambda'_A\mu_A + \lambda_B\mu_A + \mu_A\mu_B) + (\lambda_A\lambda'_A\lambda'_B + \lambda'_A\lambda_B\lambda'_B + \lambda_A\lambda'_B\mu_B + \lambda'_A\lambda_B\mu_A) = 0 \qquad (2)$$

ed

$$a_i = \frac{s_i^2 + s_i(\lambda_A + \lambda_B + \lambda'_A + \lambda'_B + \mu_A + \mu_B) + (\lambda_A\lambda'_A + \lambda_A\mu_B + \lambda'_A\lambda'_B + \lambda'_B\mu_B + \lambda_B\lambda'_B + \lambda'_A\mu_A + \lambda_B\mu_A + \mu_A\mu_B)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} (s_j - s_j)} \qquad (3)$$

Le formule (1), (2) e (3) sono un chiaro indice delle difficoltà incontrate nel procedimento per la loro derivazione.

1.3 Approccio all'automatizzazione

Le considerazioni esposte nel paragrafo precedente giustificano appieno lo sforzo per tentare di dare una soluzione automatica al problema in esame.

L'approccio ad un simile problema parte dall'esame della metodologia C.A.D., cioè di quella metodologia che, partendo dall'esame della topologia delle reti elettriche, giunge, manipolando operatori matriciali, a risolvere la rete in maniera totalmente automatica.

Nel caso dell'affidabilità si può notare che:

a) - lo schema a blocchi dell'affidabilità è una struttura topologica, cioè dello stesso tipo delle reti elettriche;

b) - la fase di soluzione del sistema delle equazioni comporta manipolazioni su matrici, cioè sullo stesso tipo di enti matematici trattati nel C.A.D.

Questi due fatti conducono in modo naturale ad un tentativo di realizzazione del C.A.R.A. seguendo le vie già tracciate dal C.A.D., la qualcosa gode inoltre del non trascurabile vantaggio di usufruire dei notevoli risultati ottenuti dal C.A.D. nell'ambito del calcolo matriciale.

2. LO SVILUPPO DI UN PROGRAMMA DI C.A.R.A.

2.1 Introduzione

Se si esamina il procedimento che porta allo sviluppo del modello matematico dell'affidabilità di un sistema, si nota che il procedimento consta di due fasi distinte, una prima fase che a partire dallo schema a blocchi dell'affidabilità si conclude con una matrice che ne racchiude tutte le caratteristiche ed una seconda fase consistente nella soluzione delle equazioni differenziali i cui coefficienti sono raccolti nella suddetta matrice.

L'approccio all'automatizzazione presentato in questo scritto segue la stessa suddivisione nelle due fasi dette, quindi il problema generale può pensarsi diviso in due altri problemi che si enunciano come segue:

a) - data la descrizione topologica di un sistema trovare la sua matrice caratteristica nell'ipotesi che l'evoluzione temporale tra stati segua un modello markoviano omogeneo a stati-discreti e tempo-continuo;

b) - data la matrice dei coefficienti di un sistema di equazioni differenziali del primo ordine ai coefficienti costanti, trovare la soluzione tenendo presenti le richieste di precisione del calcolo e le condizioni iniziali.

Nei seguenti paragrafi saranno esaminati in dettaglio i due problemi dando maggior rilievo alla trattazione del primo in quanto il secondo è stato più volte affrontato nell'ambito degli studi tipici di un Centro di Calcolo Scientifico.

2.2 Prima fase: Organizzazione

2.2.1 Descrizione topologica ed equazione di funzionamento = Se si considera il diagramma a blocchi dell'affidabilità di un sistema è abbastanza faci

le, data una certa situazione operativa dei blocchi costituenti il sistema, dire se esso è funzionante o guasto; è infatti noto che il sistema è in grado di fornire la funzione richiesta se esiste almeno un percorso senza interruzioni ed in cui ogni nodo è interessato una sola volta (cammino semplice) tale da assicurare una connessione tra ingresso ed uscita.
E' evidente da quanto detto che la prima cosa da fare per descrivere il sistema, cioè per associare a ciascuna situazione dei blocchi la sua condizione nei riguardi del funzionamento, è trovare, a partire da una descrizione topologica, una funzione dello stato dei blocchi che permetta di effettuare in maniera automatica l'associazione detta. A tale funzione si dà il nome di "Equazione di Funzionamento".
Il punto di partenza è la descrizione topologica del sistema. Una delle possibili descrizioni topologiche è quella detta della matrice di connessione; essa si costruisce a partire dal diagramma a blocchi dell'affidabilità con la seguente regola:

- l'elemento $a_{i,k}$ della matrice di connessione è fornito dal nome del blocco che connette, in maniera orientata, il nodo i al nodo k dello schema a blocchi. Ovviamente si avrà $a_{i,k}=0$ se non c'è collegamento tra i due nodi.

  Si consideri, a titolo di esempio, lo schema a blocchi dell'affidabilità riportato in fig. 2

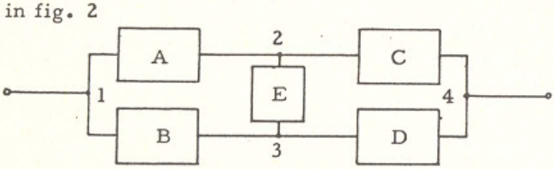

Fig. 2

con la condizione che il blocco E sia bidirezionale. La matrice di connessione associata è la seguente:

$$\begin{array}{cc|cccc} & & \multicolumn{4}{c}{\text{al nodo}} \\ & & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \text{dal nodo} & 1 & \emptyset & A & B & \emptyset \\ & 2 & \emptyset & \emptyset & E & C \\ & 3 & \emptyset & E & \emptyset & D \\ & 4 & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{array} \qquad (4)$$

L'esame della matrice ci permette di fare le seguenti notazioni:

1. Eventuali elementi bidirezionali compaiono due volte ed in posizione simmetrica rispetto alla diagonale principale.
2. Non è necessario fornire dall'esterno informazioni sui nodi di ingresso e di uscita. Tali informazioni sono infatti già contenute nella matrice; in particolare:
   a) - il nodo d'ingresso è quello a cui non termina alcun blocco, la colonna corrispondente è pertanto nulla (nodo 1 nell'esempio);
   b) - il nodo d'uscita è quello da cui non parte alcun blocco, la riga corrispondente è pertanto nulla (noda 4 nell'esempio).
3. Nel caso di più ingressi (più uscite) si avranno più colonne (righe) nulle nella matrice.

Si esamini ora una generica matrice di connessione:

$$C = \left\| \begin{matrix} c_{11} & c_{12} \cdots\cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \cdots\cdots & c_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ c_{n1} & c_{n2} \cdots\cdots & c_{nn} \end{matrix} \right\| = \left\| c_{ij} \right\|_{1}^{n} \qquad (5)$$

dove $c_{i,j}$ ha il significato detto.
Se si calcola C^2 si ottiene:

$$C^2 = \left\| c_{ij}^{(2)} \right\|_{1}^{n} \qquad (6)$$

dove il generico $c_{ij}^{(2)}$ è dato da

$$c_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\, c_{kj} \qquad (7)$$

e rappresenta quindi tutti i modi possibili di collegare il nodo i al nodo j con due blocchi aventi in comune il generico nodo K.
In maniera del tutto analoga

$$C^3 = \left\| c_{ij}^{(3)} \right\|_{1}^{n} \qquad (8)$$

dove

$$c_{ij}^{(3)} = \sum_{l=1}^{n} \; \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\, c_{kl}\, c_{lj} \qquad (9)$$

e rappresenta quindi tutti i modi possibili di collegare il nodo i al nodo j con 3 elementi formanti il percorso $i \Rightarrow k \Rightarrow l \Rightarrow j$, con k ed l generici.
Il procedimento può essere continuato per le potenze successive.
Se con i ed u si indicano rispettivamente i nodi di ingresso e di uscita, è possibile trovare, applicando tale algoritmo, tutti i possibili modi di collegarli tramite 1, 2, 3 ..., n blocchi, i collegamenti cercati sono infatti gli elementi c_{iu} nelle matrici $C, C^2, C^3 \ldots, C^n$. A ciascuno di essi corrisponde ovviamente un cammino semplice.
Tornando all'esempio di fig.2, la matrice C è fornita dalla (4) e

$$C^2 = \left\| \begin{matrix} \emptyset & BE & AE & AC+BD \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & ED \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & CE \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{matrix} \right\| \qquad (10)$$

$$C^3 = \left\| \begin{matrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & BCE+AED \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{matrix} \right\| \qquad (11)$$

$$C^{4} = \begin{Vmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{Vmatrix} \qquad (12)$$

poichè i=1 ed u=4 si ha:

Matrice	$c_{1,4}$
C	$\emptyset$
C^2	AC + BD
C^3	BCE+ADE
C^4	$\emptyset$

(13)

Prima di procedere si noti che nel moltiplicare tra loro le matrici viene annullato il prodotto di due blocchi identici, in quanto già considerato nel cammino di ordine inferiore. Tale situazione si verifica ogni volta che appaiono nodi bidirezionali.
Effettuando la somma logica dei cammini semplici si ottiene l'espressione logica dell'equazione di funzionamento relativa all'uscita 4, precisamente

$$F4 = AC+BD+BCE+ADE \qquad (14)$$

Si può concludere questo paragrafo dicendo:
"L'equazione di funzionamento Fx (relativa all'uscita x) è una funzione logica data dall'OR dei cammini semplici, ciascuno dei quali formato da un singolo blocco o dall'AND di due o più blocchi. Il sistema sarà funzionante se, sostituendo ai blocchi i valori 1 o $\emptyset$, a seconda del loro stato di funzionamento o meno, l'espressione logica assume valore 1, non funzionante se il suo valore è $\emptyset$".

2.2.2 Descrizione degli stati del sistema = La conoscenza dell'equazione di funzionamento permette la descrizione completa di tutti i possibili stati del sistema. Infatti, semplicemente contando le lettere diverse che compaiono nell'equazione, si ha il numero di blocchi costituenti il sistema (tale informazione può però essere fornita dall'esterno o ricavata dalla descrizione topologica iniziale). Se ogni blocco può trovarsi in una di due situazioni operative, rispettivamente di funzionamento (1) o di guasto ($\emptyset$), le possibili configurazioni sono 2^n, essendo n il numero dei blocchi; operando come detto alla fine del paragrafo precedente, è possibile associare ad ogni configurazione la condizione operativa del sistema, si ottiene quindi una tabella che descrive completamente i possibili stati.
Nel caso dell'esempio di fig.2, le possibili configurazioni sono $2^5=32$ e la tabella degli stati è la seguente:

		A	B	C	D	E	F4
0 guasti	S1	1	1	1	1	1	1
1 guasto	S2	1	1	1	1	Ø	1
	S3	1	1	1	Ø	1	1
	S4	1	1	Ø	1	1	1
	S5	1	Ø	1	1	1	1
	S6	Ø	1	1	1	1	1
2 guasti	S7	1	1	1	Ø	Ø	1
	S8	1	1	Ø	1	Ø	1
	S9	1	1	Ø	Ø	1	Ø
	S10	1	Ø	1	1	Ø	1
	S11	1	Ø	1	Ø	1	1
	S12	1	Ø	Ø	1	1	1
	S13	Ø	1	1	1	Ø	1
	S14	Ø	1	1	Ø	1	1
	S15	Ø	1	Ø	1	1	1
	S16	Ø	Ø	1	1	1	Ø
3 guasti	S17	1	1	Ø	Ø	Ø	Ø
	S18	1	Ø	1	Ø	Ø	1
	S19	1	Ø	Ø	1	Ø	Ø
	S20	1	Ø	Ø	Ø	1	Ø
	S21	Ø	1	1	Ø	Ø	Ø
	S22	Ø	1	Ø	1	Ø	1
	S23	Ø	1	Ø	Ø	1	Ø
	S24	Ø	Ø	1	1	Ø	Ø
	S25	Ø	Ø	1	Ø	1	Ø
	S26	Ø	Ø	Ø	1	1	Ø
4 guasti	S27	1	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø
	S28	Ø	1	Ø	Ø	Ø	Ø
	S29	Ø	Ø	1	Ø	Ø	Ø
	S30	Ø	Ø	Ø	1	Ø	Ø
	S31	Ø	Ø	Ø	Ø	1	Ø
5 guasti	S32	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø

Si noti che se n è il numero di blocchi si ha:

$\binom{n}{0} = 1$ stati senza guasto

$\binom{n}{1} = n$ stati con 1 guasto

. . . .

$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)}$ stati con i guasti

. . . .

$\binom{n}{n-1} = n$ stati con (n-1) guasti

$\binom{n}{n} = 1$ stati con n guasti

Da quanto esposto fino a questo punto si può dire che, dal punto di vista topologico, si ha perfetta equivalenza di informazioni tra:

- diagramma a blocchi dell'affidabilità
- equazione di funzionamento
- tabella degli stati del sistema

2.2.3 Organizzazione della matrice dei coefficienti = La matrice dei coefficienti delle n equazioni differenziali del primo ordine che rappresentano il modello matematico del sistema si organizza a partire dalla sua tabella degli stati.

Si consideri ad esempio il sistema di fig. 1, in cui le condizioni sono di blocchi differenti ($\lambda_A \neq \lambda_B; \mu_A \neq \mu_B$) con frequenze di guasto e riparazione non condizionate da particolari situazioni operative.

Gli stati per tale sistema sono:

	A	B	Sist
S1	F	F	F
S2	NF	F	F
S3	F	NF	F
S4	NF	NF	NF

Per il calcolo delle disponibilità le equazioni si ricavano col seguente ragionamento.

Il sistema è nello stato S1 al tempo $(t+\Delta t)$ se era in S1 in t e non avviene alcun guasto in Δt, oppure se era in S2 in t ed avviene la riparazione di A in Δt, oppure se era in S3 in t ed avviene la riparazione di B in Δt, in formule

$$P_1(t+\Delta t) = [1-(\lambda_A+\lambda_B)\Delta t]P_1(t)+\mu_A \Delta t \cdot P_2(t) + \mu_B \Delta t \cdot P_3(t) \tag{15'}$$

in maniera analoga per gli altri stati

$$P_2(t+\Delta t) = \lambda_A \Delta t \cdot P_1(t) + [1-(\lambda_B+\mu_A)\Delta t]P_2(t) + \mu_B \Delta t \cdot P_4(t) \tag{15''}$$

$$P_3(t+\Delta t) = \lambda_B \Delta t \cdot P_1(t) + [1-(\lambda_A+\mu_B)\Delta t]P_3(t) + \mu_A \Delta t \cdot P_4(t) \tag{15'''}$$

$$P_4(t+\Delta t) = \lambda_B \Delta t \cdot P_2(t) + \lambda_A \Delta t \cdot P_3(t) + [1-(\mu_A+\mu_B)\Delta t]P_4(t) \tag{15''''}$$

portando a primo membro il termine in t corrispondente a quello in $(t+\Delta t)$ che già vi si trova, dividendo per Δt e passando al limite per $\Delta t \to 0$ si ottiene il seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} P'_1(t) = -(\lambda_A+\lambda_B)P_1(t) + \mu_A P_2(t) + \mu_B P_3(t) \\ P'_2(t) = \lambda_A P_1(t) - (\lambda_B+\mu_A)P_2(t) + \mu_B P_4(t) \\ P'_3(t) = \lambda_B P_1(t) - (\lambda_A+\mu_B)P_3(t) + \mu_A P_4(t) \\ P'_4(t) = \lambda_B P_2(t) + \lambda_A P_3(t) - (\mu_A+\mu_B)P_4(t) \end{cases} \tag{16}$$

cioè, in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} P'_1(t) \\ P'_2(t) \\ P'_3(t) \\ P'_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\lambda_A+\lambda_B) & \mu_A & \mu_B & 0 \\ \lambda_A & -(\lambda_B+\mu_A) & 0 & \mu_B \\ \lambda_B & 0 & -(\lambda_A+\mu_B) & \mu_A \\ 0 & \lambda_B & \lambda_A & -(\mu_A+\mu_B) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \\ P_4(t) \end{bmatrix} \quad (17)$$

oppure:

$$p'(t) = \Lambda \cdot p(t) \quad (18)$$

essendo Λ la matrice dei coefficienti.
Esaminando la (17) si nota che il generico elemento $\lambda_{ij}(i \neq j)$ di Λ rappresenta la frequenza istantanea dell'evento "passaggio dallo stato j allo stato i" ed è quindi pari alla frequenza di guasto o di riparazione del blocco che con il suo cambiamento di stato operativo determina il cambiamento di stato del sistema. I λ_{jj} , rappresentando la frequenza di permanenza nello stato j, sono il completamento a $\emptyset$ delle frequenze di passaggio contenute nella stessa colonna, ciò risiede nel fatto che le alternative sono 2, o il sistema cambia di stato o resta in quello di partenza.
Se si fosse tentato di scrivere la matrice relativa al calcolo dell'affidabilità occorreva tener presente che lo stato di guasto è assorbente, ma la metodologia sarebbe stata esattamente la stessa.
Pertanto, una volta ottenuta la tabella degli stati del sistema, il suo esame permette di scrivere la matrice dei coefficienti semplicemente ponendo all'incrocio tra la colonna j-esima e la riga i-esima la frequenza di guasto o di riparazione del blocco che appare in condizioni differenti tra i due stati Sj ed Si.
Il passaggio tra stati è regolato dalle ipotesi del modello di Poisson, dalla presenza o meno di stati assorbenti e dalla politica di manutenzione.
Mentre le ipotesi poissoniane sono sempre accettate, eventuali stati assorbenti appaiono o no a seconda che si tratti di affidabilità o disponibilità, per tale motivo le due matrici dei coefficienti saranno trattate separatamente considerando le possibili politiche di manutenzione nei due casi.

2.2.3.1 Matrice dei coefficienti per la valutazione di R(t) = L'affidabilità al tempo t è definita come la probabilità che il sistema funzioni al tempo t senza essere mai passato per stati di non funzionamento. Essa sarà quindi data dalla somma delle probabilità di permanenza al tempo t competenti agli stati del sistema per cui $F_x=1$. Il non passaggio per stati di non funzionamento implica che tali stati ($F_x=0$) sono assorbenti, pertanto eventuali riparazioni, qualora previste, sono possibili solo se lo stato in cui intervengono è di funzionamento.
Nel caso dell'affidabilità sono previste due diverse politiche di manutenzione denominate "caso della riparazione singola" e "caso della riparazione multipla" esse sono caratterizzate nel seguente modo:

a) - Caso della riparazione singola: è previsto un solo team di manutenzione, pertanto eventuali blocchi guasto contemporaneamente verranno riparati in sequenza temporale. E' chiaro che in questo caso occorre fornire una priorità tra i blocchi in modo da essere in grado di decidere, in caso di guasti contemporanei, la sequenza di riparazione.

La priorità fra blocchi può essere stabilita in maniera automatica assumendo le seguenti regole:

- si riparano dapprima i blocchi che influenzano il maggior numero di cammini semplici, cioè che compaiono il maggior numero di volte nell'equazione di funzionamento (priorità gerarchica);
- a parità di priorità gerarchica si riparano i blocchi in ordine crescente di tempo di riparazione (ordine decrescente di frequenza di riparazione) (priorità temporale);
- a parità di priorità gerarchica e temporale si stabilisce un ordine casuale, ad es. alfabetico (priorità casuale).

Ad es. nel caso di fig.2, se le condizioni sono

$$\mu_E > \mu_A > \mu_C > \mu_B = \mu_D$$

poichè da (14) appare che la priorità gerarchica è 2 per ogni blocco, si ha che, tenendo conto della priorità temporale, l'ordine di riparazione è

E, A, C, B o D

b) - Caso della riparazione multipla: è previsto un team di manutenzione per ogni blocco guasto, quindi eventuali blocchi guasti contemporaneamente vengono riparati in parallelo ed il sistema può passare da uno stato ad f guasti ad uno qualunque degli stati ad (f-1) guasti da cui ha avuto origine (Poisson).

-- La definizione di affidabilità, l'ipotesi di Poisson e le precisazioni relative alla politica di manutenzione conducono a delle regole che permettono di ricavare, per semplice confronto tra gli stati, la matrice dei coefficienti per il calcolo dell'affidabilità. Le regole per la costruzione della matrice sono le seguenti:

- da uno stato di funzionamento è possibile passare agli stati aventi un blocco guasto in più. Se la tabella degli stati è organizzata per numero crescente di guasti e se lo stato di partenza Sj è caratterizzato da k blocchi guasti, basta confrontare tale Sj con tutti gli S_i, in numero di $\binom{n}{k+1}$ essendo n il numero di blocchi, aventi un guasto in più. I passaggi possibili sono quelli tra lo stato Sj e gli stati S_i aventi distanza di Hamming da esso pari ad 1. Per ogni passaggio possibile tra Sj ed S_i si porrà un elemento λ_{ij} nella matrice, pari alla frequenza di guasto del blocco sano in Sj e guasto in S_i
- da uno stato di funzionamento, se è prevista la manutenzione, è possibile passare agli stati aventi un blocco guasto in meno. I passaggi sono regolati dalla scelta della politica di manutenzione; precisamente se la manutenzione è multipla dallo stato Sj è possibile passare a tutti quegli stati S_i aventi distanza di Hamming da esso pari ad 1, il λ_{ij} relativo è pari alla frequenza di riparazione del blocco guasto in Sj e sano in S_i; se la manutenzione è singola da Sj è possibile passare soltanto a quello tra gli S_i possibili cui corrisponde la riparazione del blocco, tra quelli guasti in Sj, avente la maggiore priorità, il λ_{ij} è pari alla frequenza di riparazione di tale blocco.
- gli elementi sulla diagonale principale sono dati dalla somma degli elementi sulla stessa colonna, cambiata di segno:

$$\lambda_{jj} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} \qquad (i \neq j) \qquad (19)$$

- gli stati di guasto, essendo assorbenti, sono caratterizzati da colonne totalmente nulle.

Si consideri ad esempio la tabella degli stati relativa al sistema di fig.2, da S7 è possibile passare in S17, S18 ed S21 e si ha:

$\lambda_{17,7} = \lambda_C; \lambda_{18,7} = \lambda_B; \lambda_{21,7} = \lambda_A$

Se è prevista la manutenzione multipla è possibile il passaggio da S7 in S2 ed in S3 e si ha

$\lambda_{2,7} = \mu_D; \lambda_{3,7} = \mu_E$

mentre se è prevista la riparazione semplice ed è ad es. E con maggiore priorità rispetto a D, si ha

$\lambda_{2,7} = 0; \lambda_{3,7} = \mu_E$

L'elemento sulla diagonale principale ha il seguente valore a seconda dei casi:

senza manutenzione	$\lambda_{7,7} = -(\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C)$
manutenzione multipla	$\lambda_{7,7} = -(\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C+\mu_D+\mu_E)$
manutenzione singola	$\lambda_{7,7} = -(\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C+\mu_E)$

2.2.3.2 Matrice dei coefficienti per la valutazione di A(t) = La disponibilità al tempo t è definita come la probabilità che il sistema funzioni al tempo t indipendentemente dal passaggio o meno per stati di non funzionamento durante la sua evoluzione temporale. Essa sarà quindi data dalla somma delle probabilità di permanenza al tempo t competenti agli stati del sistema per cui $F_X=1$. La possibilità di passaggio per stati di non funzionamento implica che non esistono stati assorbenti.

Nel caso della disponibilità, ai fini della politica di manutenzione, occorre distinguere il caso in cui nello stato di guasto, o in qualche altro stato deciso ai fini della manutenzione, il sistema viene spento o se resta comunque acceso

a) - sistema comunque acceso: le regole sono le stesse viste nel caso della R(t) salvo il fatto che in questo caso si può uscire per guasto o riparazione anche da stati in cui il sistema è non funzionante.

b) - sistema spento per manutenzione: in tal caso dallo stato in cui il sistema viene spento sono inibiti i passaggi a stati con numero maggiore di guasti, mentre è possibile la sola riparazione. Occorre evidentemente definire lo stato in cui il sistema viene riacceso (stato funzionante con r guasti o meno, stato iniziale, etc.), quindi sono inibiti i passaggi dallo stato in esame a quelli intermedi tra esso e lo stato di ripristino.

Nel caso di manutenzione multipla il tempo necessario alla riparazione sarà pari al tempo massimo relativo ai blocchi da riparare, quindi la riparazione avverrà con un μ pari al μ minimo.

Sempre nel caso del sistema di fig.2, si supponga ad es. che in S17 il sistema viene spento ed è riacceso in S1, se $\mu_C > \mu_D > \mu_E$.

si avrà

$\lambda_{1,17} = \mu_E$

Nel caso di manutenzione singola invece, i blocchi verranno riparati seguendo le priorità stabilite, ed il tempo sarà la somma dei tempi necessari alle riparazioni, quindi

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{g} \frac{1}{\mu_i}} \tag{20}$$

essendo g il numero dei blocchi che occorre riparare per passare da S_j in S_i; sempre nel passaggio da S17 ad S1, in questo caso è

$$\lambda_{1,17} = \frac{1}{\frac{1}{\mu_C}+\frac{1}{\mu_D}+\frac{1}{\mu_E}}$$

2.3 Seconda fase: soluzione

Seguendo le regole e le tecniche esposte nei paragrafi precedenti si è visto che, a partire dalla descrizione topologica, e dalle condizioni imposte al sistema, è possibile ricavare una matrice dei coefficienti contenente tutte le informazioni sul sistema (connessione dei blocchi, parametri, politiche di manutenzione, eventuali condizionamenti, etc.).

Per ottenere la soluzione del problema occorre ora risolvere il sistema di equazioni differenziali lineari ed omogenee i cui coefficienti sono raccolti nella suddetta matrice.

Facendo uso del calcolatore, tale soluzione può essere trovata in molti modi.

a) - Si può seguire una via analoga a quella adottata nel calcolo non automatico tramite i grafi di flusso, cioè passare dalle equazioni differenziali alle equazioni algebriche nella variabile complessa s, risolvere il sistema in tale dominio ed ottenere la soluzione antitrasformando i risultati. Tale modo di procedere non appare però molto pratico in quanto comporta l'antitrasformazione per via numerica e ciò rende il metodo oggi non competitivo rispetto a quelli che operano nel dominio di t.

b) - Si può risolvere il sistema di equazioni per via numerica facendo uso di tecniche abbondantemente sviluppate nei Centri di Calcolo Scientifico. Un tal modo di procedere fornisce il valore della grandezza cercata, o il suo andamento grafico per punti, non ne dà però l'espressione analitica.

c) - Volendo ricercare l'espressione analitica delle probabilità, il metodo classico è il seguente.

Dato il sistema di equazioni differenziali lineari ed omogenee

$$\dot{p}(t) = \Lambda p(t) \tag{21}$$

la sua soluzione è data da

$$p(t) = e^{\Lambda t}\; p(0) \tag{22}$$

essendo:

$p(t)$ = vettore delle soluzioni

$e^{\Lambda t}$ = matrice di transizione del sistema

$p(0)$ = vettore delle condizioni iniziali

Si ritiene necessaria la seguente precisazione: in quanto precede si è adottata la terminologia propria della teoria dei sistemi, per cui matrice di transizione è $e^{\Lambda t}$, da ciò deriva il fatto di aver chiamato matrice dei coefficienti la Λ che abitualmente nella teoria dell'affidabilità è chiamata proprio matrice di transizione.

E' importante chiarire il significato dell'operazione di esponenziazione di una matrice.

Data la matrice quadrata $A=[a_{ij}]$, si definisce e^A attraverso la seguente serie:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \tag{23}$$

con le solite convenzioni che $A^0=1$ e $0!=1$. Si noti pertanto che sarebbe fortemente errato scrivere $e^A=[e^{a_{ij}}]$, si noti pure che questo è però valido nel caso che A sia diagonale.

Per quanto chiarito risulta agevole l'operazione di esponenziazione nel caso di matrice diagonale, pertanto si cerca di riportare $e^{\Lambda t}$ di formula (22) a questo caso semplice. Per far ciò si usa un ben noto risultato della teoria delle trasformazioni per similarità applicabile nel caso in esame e cioè che:

$$\Lambda = QDQ^{-1} \tag{24}$$

essendo:

$D = \mathrm{diag}\,(d_1, d_2, \ldots, d_n)$

essendo d_i il generico autovalore di Λ

$Q = [q_{ij}]$ con $[q_{i,j}]$ $(i= 1, \ldots, n)$ autovettore corrispondente all'autovalore d_i

Sulla base di (24) la (22) può scriversi

$$p(t)=e^{QDQ^{-1}t}\,p(0)=e^{Q(Dt)Q^{-1}}\,p(0) \tag{25}$$

e per una proprietà dell'esponenziale si ha:

$$p(t) = Q\,e^{Dt}\,Q^{-1}\,p(0) \tag{26}$$

come si vede la esponenziazione è fatta nella (26) su matrice diagonale, come ci si era proposti, e la soluzione si trova in tal caso in maniera abbastanza agevole. Il costo del metodo indicato risiede nella ricerca degli autovalori e dei corrispondenti autovettori della matrice Λ.

3. CONCLUSIONE

I risultati cui si è giunti nel presente articolo mostrano la possibilità di automatizzare il processo di predizione delle grandezze caratteristiche dell'affidabilità.
Si vuol puntualizzare il fatto che le scelte operate nella soluzione dei singoli passi del processo non sono le uniche possibili in quanto potrebbero essere sviluppate vie alternative per raggiungere i singoli risultati; la scelta dell'uno o dell'altro metodo è dettata dalle esperienze dei singoli e dai mezzi di calcolo a disposizione.
Il quadro che deriva dalla trattazione usata è il seguente:

- è possibile, a partire dalla descrizione topologica del sistema, sviluppare un programma per la derivazione delle caratteristiche dell'affidabilità;
- il problema maggiore risiede nelle dimensioni del sistema, in quanto il costo della soluzione è in pratica concentrato nella soluzione della matrice dei coefficienti il cui numero di elementi è fortemente influenzato da dette dimensioni.

I vantaggi dell'automatizzazione sono i seguenti:

- possibilità di trattare sistemi di dimensioni nettamente superiori a quelle trattabili manualmente;
- possibilità di inserire condizionamenti sui parametri dei blocchi;
- tempestività di risposta.

Si fa notare che nel presente articolo sono stati trattati i casi dell'affidabilità e della disponibilità, è però possibile sviluppare algoritmi che, a partire dalla matrice dei coefficienti, permettono di calcolare altre grandezze caratteristiche, come ad es. l'MTBF.
Desidero ringraziare i colleghi del Centro di Analisi di Base e Calcolo Scientifico della Selenia per la valida collaborazione nell'impostazione del problema ed il Prof. V.Amoia del Politecnico di Milano per le chiarificanti delucidazioni sui problemi concernenti la manipolazione delle matrici.