Decimo Convegno Nazionale
della
Associazione Italiana per il Controllo della Qualità

L'ASSICURAZIONE DELLA QUALITÀ NELLE INTERRELAZIONI AZIENDA - MERCATO - AMBIENTE

Memorie - Vol. 1

Torino - 11/12 Ottobre - 1978

INDICE PER MEMORIA

IL PUNTO DI VISTA MARKOVIANO E QUELLO INTEGRALE PER L'AFFIDABILITA' DEI SISTEMI

Vito Amoia - Politecnico di Milano
Ernani Carrada - Selenia Roma
Roberto Somma - Selenia Roma

INTRODUZIONE

E' nota la diffusione dei modelli markoviani per lo studio dell'affidabilità dei sistemi elettronici. La crescente complessità di questi sistemi rende onerosa sia la formulazione che la risoluzione delle rappresentazioni matematiche dei pur semplici modelli markoviani, cosa che spinge inesorabilmente verso l'uso di metodi automatici di calcolo. L'analisi dei problemi implicati in questa automatizzazione ha costretto gli autori ad un riesame critico e ad un approfondimento dell'approccio markoviano all'affidabilità dei sistemi ed il punto di vista da loro maturato è contenuto in [1] , ove alcuni risultati originali sono presentati in un contesto di risultati ormai classici, ma riformulati tenendo conto della formazione, del linguaggio e delle necessità di chi è fondamentalmente impegnato a risolvere problemi pratici di affidabilità.
L'individuazione dei limiti di applicabilità dell'approccio markoviano all'affidabilità dei sistemi reali, che saranno per completezza richiamati nel paragrafo successivo, ha motivato gli autori ad iniziare indagini per un superamento di tali limitazioni. Questa indagine non poteva non cominciare che da una teoria, nota come "teoria integrale", che è stata oggetto di attenzione poichè si presentava come atta a superare le limitazioni insite nella formulazione markoviana classica.
Basandosi su [2, 3. 4. 5, 6, 7] , e principalmente su [8] , ritenuto riassuntivo poichè l'autore ivi afferma che "nessuna conoscenza dei suoi precedenti lavori è necessaria alla comprensione di quanto esposto nel seguito". è stato dimostrato in [9] che le equazioni fondamentali della teoria integrale altro non sono che una diversa formulazione della equazione inversa di Kolmogorov, che caratterizza i processi markoviani di interesse per l'affidabilità.
Nella riunione del Sottogruppo di Lavoro A.I.C.Q. "Metodi di valutazione dell'affidabilità dei sistemi" del Maggio scorso dedicata alla teoria integrale, l'autore di questa teoria faceva notare che la formulazione contenuta in [7] non rientrava completamente in [8] , nonostante la citata affermazione in esso contenuta, e pertanto quanto dimostrato in [9] non includeva del tutto [7] .
Tale indicazione ha indotto all'ulteriore indagine, basata su [7] . presentata in questa memoria.

2. LIMITAZIONI DELL'APPROCCIO MARKOVIANO

La rappresentazione matematica di un modello markoviano è un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine; come ben noto, e d'altro canto è riportato in [1, pag. 15] , condizione sufficiente per l'esistenza e l'unicità della soluzione del detto sistema di equazioni è la continuità della matrice dei suoi coefficienti, $\mathbf{Z}(t)$, nota come "matrice dei tassi di transizione", almeno nell'intervallo in cui tale soluzione si va ricercando.

La soluzione quindi esiste ed è unica nel caso stazionario, $Z(t) = \Lambda = \text{cost.}$; si tratta del modello più semplice e più diffuso che ipotizza tassi di guasto e di riparazione costanti e del quale sono ben noti vantaggi e limitazioni.
Nel caso non stazionario l'assenza di memoria, che è alla base del modello di Markov, si traduce concretamente nelle ipotesi seguenti:

a) - Quando un componente si guasta, esso non viene rinnovato, ma l'azione di riparazione lo rimette in grado di funzionare nelle identiche condizioni di invecchiamento raggiunte all'istante in cui termina la riparazione.

b) - Per quanto concerne i tassi di riparazione il discorso è più complesso. Il processo di riparazione inizia nell'istante in cui avviene il guasto e può essere schematizzato come in fig. 1, ove con t_{gi} è indicato l'istante dell'i-esimo guasto e con $f(t_{ri})$ la f.d.p. della variabile aleatoria "tempo di riparazione dell'i-esimo guasto", t_{ri}.

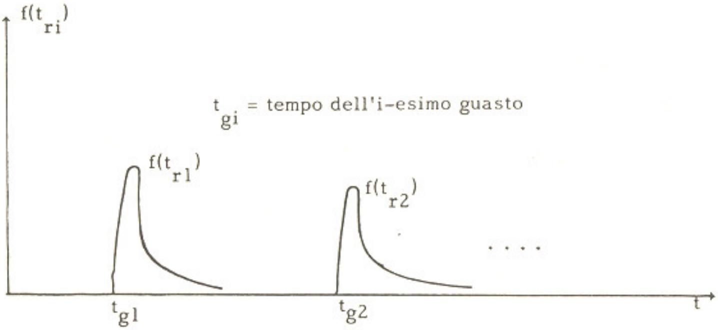

Fig. 1

Ne risulta evidente l'impossibilità di trasferire tutte le informazioni contenute in questa schematizzazione in un'unica funzione $\mu(t)$, continua in tutto l'intervallo di interesse. Né si può pensare di considerare una funzione continua a tratti, e quindi riconducibile nell'ambito markoviano, poichè sono per loro natura ignoti gli istanti di guasto, da assumere ovviamente come punti di discontinuità.

Se ne deduce l'inadeguatezza del modello di Markov, anche nella sua formulazione più generale, a descrivere compiutamente la realtà. Ovviamente è possibile in molti casi dare della realtà una descrizione semplificata che consenta di usare il modello di Markov ed ottenere soluzioni sufficientemente approssimate, ma tali considerazioni esulano dall'economia di questa memoria.

3. IPOTESI ALLA BASE DELLA TEORIA INTEGRALE

Ai fini di individuare la realtà descritta dalla teoria integrale, così come formulata in [7] , è fondamentale indagare sulle ipotesi che sono alla base di tale formulazione. Con riferimento a [7] , si richiamano, nella formulazione ivi usata, alcune definizioni:

a) - $\overline{W}_i(t)$ è la probabilità che il sistema sia rimasto nello stato i nell'intervallo $\overline{o \quad t}$;

b) - $E_{ik}(r)$ è l'evento "transizione allo stato k durante l'intervallo $\overline{r \qquad r+dr}$ per la prima volta dopo che il sistema è entrato nello stato i al tempo 0"; la probabilità di questo evento si indica con $P\{E_{ik}(r)\}$;

c) - $\phi_{ij}(t)$ è la probabilità che il sistema sia nello stato j all'istante t, se era inizialmente nello stato i all'istante 0.

Sulla base di queste definizioni, l'autore della teoria integrale scrive la seguente equazione fondamentale [7, eq. 23] :

$$\phi_{ij}(t) = \delta_{ij}\overline{W}_i(t) + \sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{N} \int_0^t P\{E_{ik}(r)\}\,\phi_{kj}(t-r) \quad , \qquad i,j=0,\ldots\ldots,N \tag{3.1}$$

con [7, eq. 24] :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i\neq j \end{cases} \tag{3.2}$$

Nella sommatoria della (3.1) è parso opportuno esplicitare la condizione $k\neq i$.
L'eq. (3.1) si interpreta come segue:
"il sistema effettua la prima transizione da i al generico stato k (eventualmente coincidente con j) nell'intervallo $\overline{r \qquad r+dr}$, interno a $\overline{o \qquad t}$, quindi passa da k a j (eventualmente da j a j) nel restante intervallo $\overline{r \qquad t}$ ".
L'integrale della (3.1) tiene conto del fatto che r può essere un qualunque istante dell'intervallo $[0,t]$.
Ovviamente, se $i=j$ occorre tener conto anche della probabilità che il sistema resti in i, ciò è fatto per mezzo del primo termine del secondo membro.
Al di là degli sviluppi successivi derivanti dalla formulazione del problema nei termini espressi dalla (3.1), si noti che tale formulazione interpreta il seguente processo:
"dopo ogni transizione l'evoluzione del sistema riparte dall'istante 0";
questo appare con evidenza dalla notazione $\phi_{kj}(t-r)$ per esprimere la transizione da k a j in un intervallo di tempo che non è $[0,t-r]$, bensì $[r,t]$, cosa certamente irrilevante nel processo stazionario.
In termini pratici, un sistema di n componenti passa in un determinato istante da uno stato ad un altro per il cambiamento di stato (guasto o riparazione) di uno solo dei suoi componenti. E' indubbio che per quel componente, e quello solo, ha inizio un'evoluzione che tende a riportarlo alla condizione di partenza (*); per questa

(*) Per maggior chiarezza:
- se il componente si è appena guastato, inizia da quel momento un'azione di riparazione;
- se viceversa si è appena terminata un'azione di riparazione del componente, esso inizia da quel momento una nuova evoluzione verso il guasto.

evoluzione, che ha inizio nell'istante in cui si è avuta la transizione, ha effettivamente senso considerare l'intervallo $[0,t-r]$, invece del reale intervallo $[r,t]$; per i restanti $(n-1)$ componenti l'evoluzione non riparte da 0, ma continua.
Si consideri, ad esempio, un sistema formato da due componenti, A e B, con manutenzione multipla, aventi la $z(t)$ del tipo mostrato in fig. 2, e la $\mu(t)$ del tipo di fig. 3:

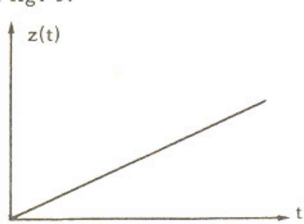

Fig. 2

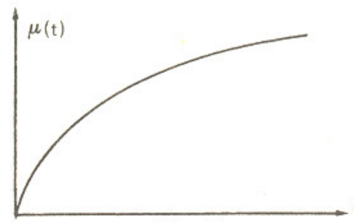

Fig. 3

Siano r, s ed u i tre istanti in cui avvengono i seguenti tre eventi successivi:
- in r si guasta A;
- in s si guasta B;
- in u termina la riparazione di A.

Evidentemente negli intervalli di tempo individuati da questi tre istanti, il sistema si trova nelle situazioni descritte qui di seguito:
- nell'intervallo $[0,r]$ sia A che B sono funzionanti ed invecchiano in accordo alle $z(t)$ iniziando in 0;
- nell'intervallo $[r,s]$, mentre B continua l'evoluzione iniziata in 0 e caratterizzata dalla $z(t)$, A è in riparazione ed è quindi caratterizzato da una $\mu(t)$ iniziante in r;
- nell'intervallo $[s,u]$, mentre per A continua il processo di riparazione iniziato in r, B viene sottoposto ad un'altra azione di riparazione con inizio in s;
- nell'intervallo tra u e l'istante dell'evento successivo, A, riparato, comincia in u un nuovo processo di invecchiamento, mentre per B continua il processo di riparazione iniziato in s.

Ciò può essere schematicamente rappresentato come nella fig. 4, in cui per maggior chiarezza si sono tenuti distinti i processi di invecchiamento e di riparazione. Sempre in fig. 4 si è riportata in linea tratteggiata la situazione descritta dalla (3.1) ed in tratto e punto la descrizione markoviana classica.

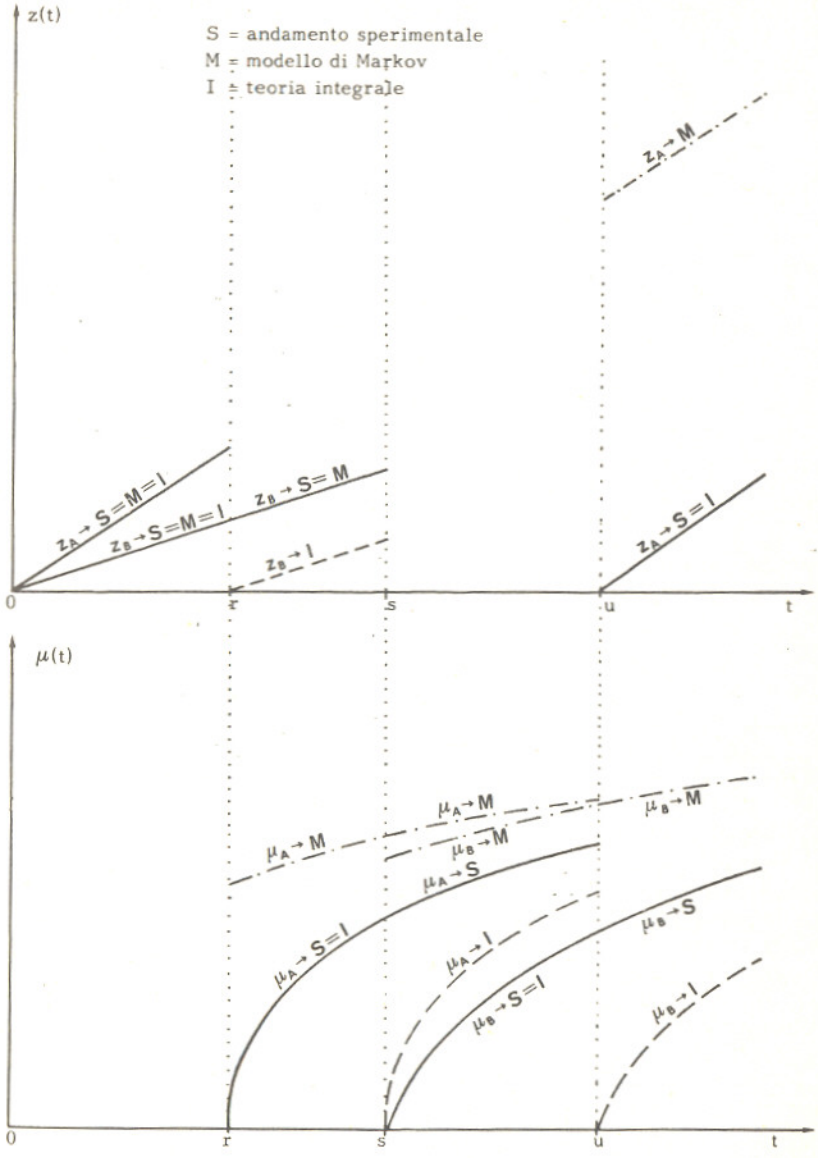
z(t)
S = andamento sperimentale
M = modello di Markov
I = teoria integrale
$z_A \rightarrow M$
$z_A \rightarrow S=M=I$
$z_B \rightarrow S=M=I$
$z_B \rightarrow S=M$
$z_B \rightarrow I$
$z_A \rightarrow S=I$
0
r
s
u
t
$\mu(t)$
$\mu_A \rightarrow M$
$\mu_A \rightarrow M$
$\mu_B \rightarrow M$
$\mu_B \rightarrow M$
$\mu_A \rightarrow S$
$\mu_A \rightarrow S=I$
$\mu_A \rightarrow I$
$\mu_B \rightarrow S$
$\mu_B \rightarrow S=I$
$\mu_B \rightarrow I$
0
r
s
u
t

Fig. 4

4. CONCLUSIONI

Si è mostrato come in generale la realtà non sia rappresentata con ragionevole approssimazione né dal modello markoviano, cosa ampiamente nota, né dalla teoria integrale come formulata in [7] .

In particolare, la fig. 4 mostra che mentre il modello di Markov è ottimistico per quel che concerne le riparazioni e pessimistico nei riguardi dei guasti, la teoria integrale è al contrario ottimistica per i guasti e pessimistica per le riparazioni. Per quanto concerne le ipotesi che sono alla base dei due modelli, con riferimento al caso non stazionario, si noti che il modello markoviano fa dipendere la probabilità di transizione tra stati dal "quando" il sistema è giunto nello stato di partenza, mentre tale dipendenza è esclusa dal modello integrale, che assume gli istanti di transizione come istanti di inizio delle evoluzioni dei componenti. Entrambi i modelli escludono peraltro la dipendenza dal "come" si è giunti negli stati di partenza. Tale assenza di dipendenza dal "quando" potrebbe far pensare la teoria integrale in discorso equivalente al modello di Markov stazionario, per il quale tale dipendenza non appare; si noti però che nel caso markoviano allo sparire di tale dipendenza sparisce anche la dipendenza del tempo trascorso in uno stato prima della transizione successiva, cosa che non avviene nel caso integrale, per il quale tale seconda dipendenza temporale rimane.

In questo senso la teoria integrale nella formulazione [7] non equivale al noto modello di Markov.

BIBLIOGRAFIA

1. RIVISTA TECNICA SELENIA, Vol.4 n.3 (1977) - Numero Speciale su: "L'Affidabilità dei Sistemi: il Modello di Markov".
2. F.Galetto: Numero di Guasti di un Sistema e Determinazione di un Modello Reale Atto a Rappresentarlo - Atti dell'VIII Convegno A.I.C.Q., Napoli, Italia, 5/'73.
3. F.Galetto: Un Metodo Efficiente per il Calcolo dell'Affidabilità dei Sistemi - Atti delle Giornate di Lavoro A.I.R.O., Palermo, Italia, 9/'74.
4. F.Galetto: LAURA (Linear Automatic Reliability Analysis) - Proceedings of 5th International Conference on Fault Tolerant Computing, Paris, France, 6/'75.
5. F.Galetto: A General Model for System Cost-Effectiveness - Proceedings of E.O.Q.C.-I.A.C. Joint Conference, Venezia, Italia, 9/'75.
6. F.Galetto: Reliability Integral Theory Analysis - Proceedings of 20th E.O.Q.C. Conference, Copenhagen, Denmark, 6/'76.
7. F.Galetto: Analisi dell'Affidabilità dei Sistemi Mediante l'Approccio Integrale - Atti del IX Convegno Nazionale A.I.C.Q., Roma, Italia, 9/'76.
8. F.Galetto: SARA (System Availability and Reliability Analysis) - Proceedings of 1977 Annual Reliability and Maintainability Symposium, Philadelphia, U.S.A. 1/'77.
9. V.Amoia, E.Carrada, R.Somma: On Relationships of System Reliability Integral Theory to Classical Markov Theory - Proceedings of 22nd E.O.Q.C. Conference, Dresden, D.D.R., 6/'78.